

Examen HAVO

2012

tijdvak 1
woensdag 23 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Dit examen bestaat uit 23 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

supersize me

In de film *Supersize Me* besluit de hoofdpersoon, Morgan Spurlock, dertig dagen lang uitsluitend fastfood te eten. Op deze manier krijgt hij elke dag 5000 kcal aan energie binnen.

Eerst wordt Morgan, die aan het begin van het experiment 85 kg weegt, nog misselijk van het eten. In het vervolg van de film went Morgan aan het type voedsel en ten slotte gaat hij het zelfs lekker vinden.



Diëtisten kunnen de gewichtstoename voorspellen met een rekenmodel. Voor actieve volwassen mannen, zoals Morgan, is er een formule om de energiebehoefte te bepalen om 'op gewicht' te blijven:

$$E_b = 33,6 \cdot G$$

Hierin is E_b de dagelijkse energiebehoefte in kilocalorieën (kcal) en G het gewicht in kg.

Veronderstel dat Morgan een dagelijkse energiebehoefte zou hebben van 5000 kcal om op gewicht te blijven. Dan zou hij volgens bovenstaande formule veel meer wegen dan de 85 kg die Morgan aan het begin van het experiment woog.

- 3p 1 Bereken hoeveel kg hij dan meer zou wegen.

In het rekenmodel wordt verder gebruik gemaakt van het gegeven dat elke 7800 kcal te veel een gewichtstoename van 1 kg veroorzaakt.

- 4p 2 Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoeveel gram Morgan al na één dag zwaarder wordt volgens het rekenmodel.

De gewichtstoename T van Morgan op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt:

$$T = 0,000128 \cdot (5000 - E_b)$$

Hierin is T de gewichtstoename in kg per dag.

Wanneer deze formule gecombineerd wordt met de formule $E_b = 33,6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G .

Deze nieuwe formule is te herleiden tot de vorm $T = a \cdot G + b$.

- 4p 3 Bereken a en b .

Het rekenmodel kan ook gebruikt worden om een gewichtsafname (een negatieve gewichtstoename) te voorspellen. Het model kan dan dienen als basis voor een dieetadvies om af te vallen.

Een man met een gewicht van 91 kg krijgt van een diëtiste het advies om af te vallen tot een gewicht van 75 kg. Ze adviseert hem om iedere dag slechts 2520 kcal aan energie te consumeren.

De diëtiste geeft hem een tabel mee die gebaseerd is op het rekenmodel. Zie de tabel. In de tabel is t de tijd in maanden vanaf het moment dat de man dagelijks 2520 kcal aan energie consumeert, G het gewicht van de man in kg en A het aantal kg dat hij nog moet afvallen.

tabel

t	0	1	2	3	4	5	6
G	91,0	89,1	87,4	85,9	84,6	83,4	82,4
A	16,0	14,1	12,4	10,9	9,6	8,4	7,4

In de tabel is bijvoorbeeld af te lezen dat de man, wanneer hij zich aan het dieetadvies houdt, na drie maanden een gewicht G heeft van 85,9 kg. Dat is 10,9 kg boven het gewenste gewicht van 75 kg, dus het aantal nog af te vallen kg A is 10,9.

Uit de tabel blijkt dat A bij benadering exponentieel afneemt. Hierbij hoort de formule:

$$A = 16 \cdot 0,88^t \text{ (met } t \text{ in maanden)}$$

De man houdt zich nauwgezet aan het dieetadvies.

- 3p **4** Bereken het gewicht van de man na acht maanden.
- 4p **5** Bereken na hoeveel maanden de man 12 kg is afgevallen.

Knock-out

Bij tennistoernooien wordt vaak voor het knock-outsysteem gekozen: wie een wedstrijd verliest, is uitgeschakeld en doet niet meer mee. De wedstrijden worden in verschillende ronden gespeeld. In de eerste ronde spelen alle spelers een wedstrijd. De winnaars gaan door naar de volgende ronde. Men speelt zoveel ronden als nodig is om uiteindelijk één winnaar te krijgen: de kampioen.



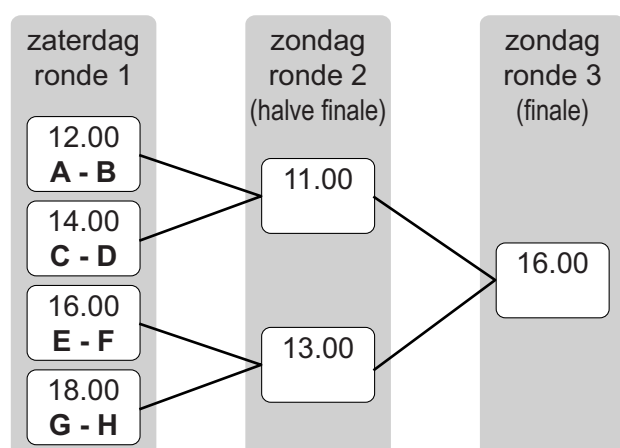
Venus Williams

Aan het Wimbledontoernooi in Londen doen in het enkelspel 128 heren en 128 dames mee. De heren spelen tegen elkaar volgens het knock-outsysteem en de dames doen hetzelfde. In 2010 werd Venus Williams bij de dames net geen kampioen. Zij verloor in de laatste ronde, de finale, van haar zus Serena Williams.

- 3p **6** Bereken hoeveel wedstrijden in het dames enkelspel Venus Williams tijdens het hele toernooi gespeeld heeft.
- 3p **7** Bereken hoeveel wedstrijden er tijdens een Wimbledontoernooi in totaal in het heren en dames enkelspel gespeeld worden.

Bij een klein tennistoernooi in Zwolle doen acht spelers mee. Ze zijn aangegeven met de letters A tot en met H. In de figuur is een mogelijke invulling gegeven van het wedstrijdschema aan het begin van het toernooi. In dit schema wordt de eerste wedstrijd door de spelers A en B gespeeld. Er zijn echter heel veel manieren om ronde 1 van het schema in te vullen. Ga ervan uit dat de wedstrijden A - B en B - A in het schema niet verschillend zijn.

figuur



- 4p **8** Bereken op hoeveel verschillende manieren ronde 1 van het schema ingevuld kan worden.

In de figuur zijn de wedstrijden van ronde 1 ingevuld. In de figuur is te zien dat de winnaars van de eerste twee wedstrijden in de halve finale tegen elkaar spelen. De twee overige winnaars van ronde 1 spelen de tweede halvefinalewedstrijd tegen elkaar.

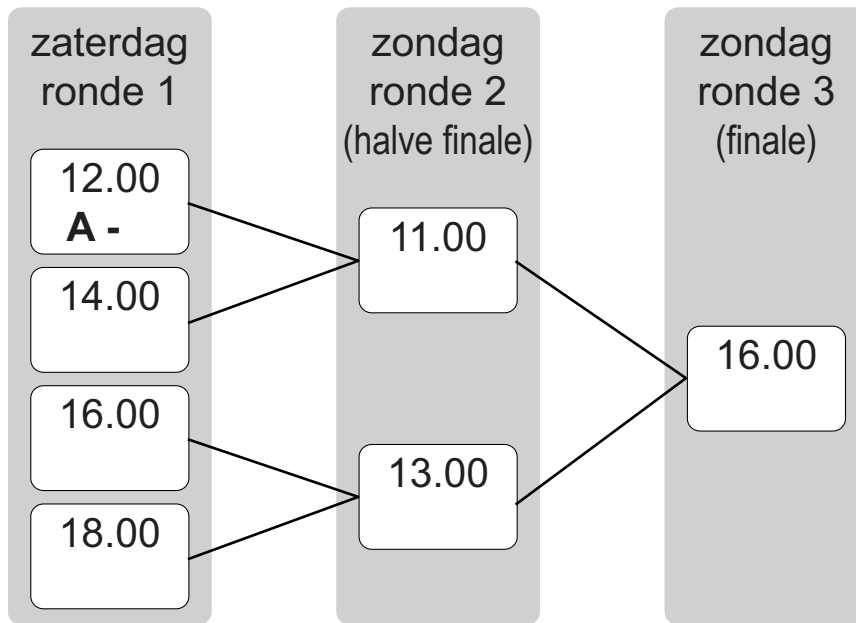
3p **9** Bereken hoeveel verschillende wedstrijden er zo in ronde 2 kunnen ontstaan.

Een belangrijk probleem bij het knock-outsysteem is de plaatsing van de spelers. Als Venus in de eerste ronde van het Wimbledontoernooi al tegen Serena had moeten spelen, zou een van beiden direct zijn uitgeschakeld en nooit de finale bereikt hebben. Daarom wordt bij het vaststellen van het wedstrijdschema rekening gehouden met de sterkte van de spelers.

Op grond van eerdere resultaten wordt bij het toernooi in Zwolle verondersteld dat speler A de sterkste speler is, gevolgd door speler B. Daarna volgen de spelers C en D. De spelers E, F, G en H zijn de zwakkere spelers.

Neem in het vervolg aan dat een sterkere speler altijd wint van een zwakkere speler. Als het wedstrijdschema in de figuur gehanteerd wordt, heeft speler B pech: hij wordt al in ronde 1 uitgeschakeld, terwijl hij de op één na beste speler is. Op basis van de sterkte van de spelers kan een beter wedstrijdschema gemaakt worden.

4p **10** Vul het wedstrijdschema op de uitwerkbijlage volledig in, zodat spelers A en B de finale spelen en spelers C en D de halve finale halen. Licht je werkwijze toe.



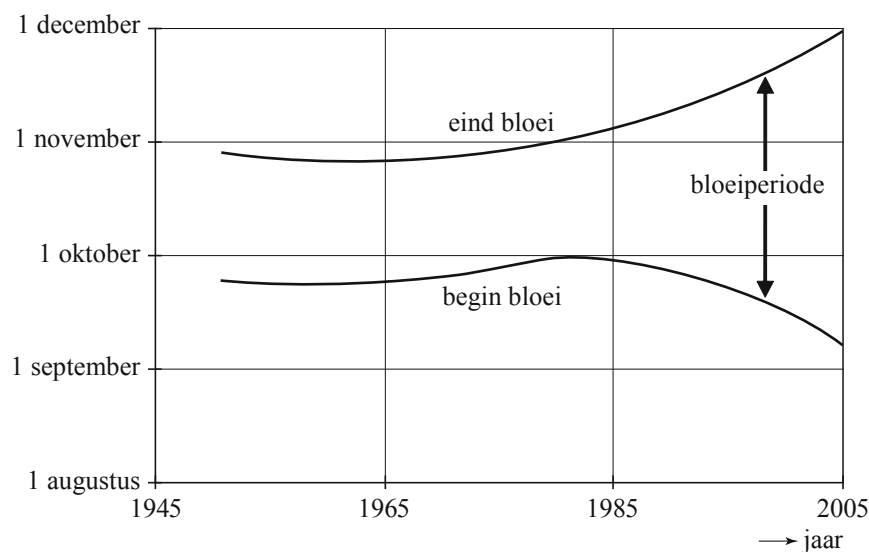
Bloeiperiode

In Zuid-Engeland onderzoekt men sinds 1950 de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen.

Na vele duizenden waarnemingen bij 315 verschillende paddenstoelsoorten hebben Britse onderzoekers geconcludeerd dat er sinds 1980 een duidelijke verandering van de gemiddelde lengte van de bloeiperiode zichtbaar is.

Zie figuur 1.

figuur 1 Bloeiperiode paddenstoelen



Van 1950 tot 1980 bleef de lengte van de bloeiperiode ongeveer gelijk. Daarna is deze in de periode van 1980 tot 2005 toegenomen van 30 tot 83 dagen. In deze opgave nemen we aan dat de lengte van de bloeiperiode sinds 1980 exponentieel toeneemt.

- 4p 11 Bereken met de gegevens van 1980 en 2005 het jaarlijkse groeipercentage vanaf 1980 in twee decimalen nauwkeurig.

Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode bij benadering te beschrijven met de formule:

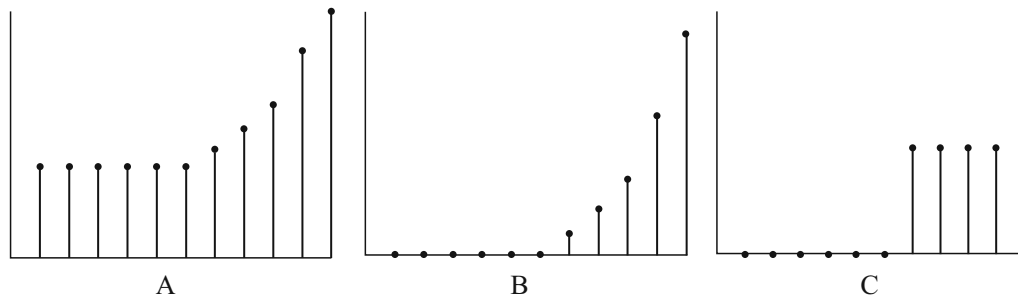
$$B = 30 \cdot 1,042^t$$

Hierin is B de lengte van de bloeiperiode in dagen en t de tijd in jaren vanaf 1980.

- 3p 12 De lengte van de bloeiperiode is van 1980 tot 2005 ruimschoots verdubbeld. Bereken in hoeveel jaar de bloeiperiode twee keer zo lang wordt.

Bij de lengte van de bloeiperiode, zoals die aangegeven is in figuur 1, kun je een toenamediagram tekenen. In figuur 2 staan drie toenamediagrammen, waarvan er één goed past bij de bloeiperiode tussen 1950 en 2005.

figuur 2

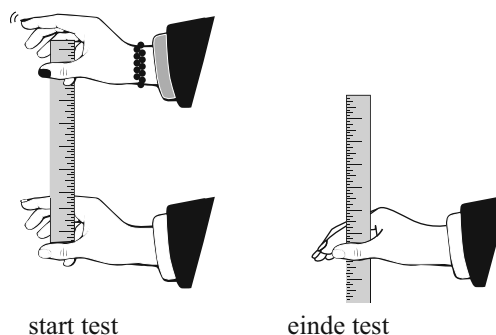


3p 13 Geef met een toelichting aan welk toenamediagram het juiste is.

Reactiesnelheid

Het themanummer van het blad Psychologie Magazine was in 2008 geheel gewijd aan De Man. Het nummer bevatte verschillende testjes waarmee je kon bepalen hoe mannelijk of vrouwelijk je bent. Een van de testjes ging over reactiesnelheid, een punt waarop mannen en vrouwen nogal verschillen.

figuur 1



tabel 1

gemiddelde vangafstand (cm)	reactietijd (milliseconden)	gemiddelde vangafstand (cm)	reactietijd (milliseconden)
0	0	16	181
2	64	18	192
4	90	20	202
6	111	22	212
8	128	24	221
10	143	26	230
12	156	28	239
14	169	30	247

Voor deze test zijn twee personen nodig en één liniaal.

Persoon 1 houdt de liniaal bovenaan vast en persoon 2 houdt duim en wijsvinger rond het 0-streepje (niet vastpakken). Persoon 1 laat de liniaal los en persoon 2 pakt de liniaal zo snel mogelijk met duim en wijsvinger. Zie figuur 1.

Het afgelezen aantal cm op de liniaal wordt de vangafstand genoemd. Na vijf pogingen wordt de **gemiddelde vangafstand** berekend. In tabel 1 is deze gemiddelde vangafstand omgerekend naar **reactietijd**.

De 18-jarige Henry doet de test en haalt de volgende resultaten: 16,2 cm, 17,2 cm, 16,1 cm, 16,7 cm en 16,8 cm. Hij berekent zijn gemiddelde vangafstand en bepaalt daarna met behulp van lineair interpoleren in tabel 1 zijn reactietijd.

- 4p **14** Laat zien dat Henry zo op een reactietijd van ongeveer 184 milliseconden uitkomt.

Tabel 1 is gemaakt met de formule $R = 100 \cdot \sqrt{\frac{A}{4,9}}$.

Hierin is R de reactietijd in milliseconden en A de gemiddelde vangafstand in cm.

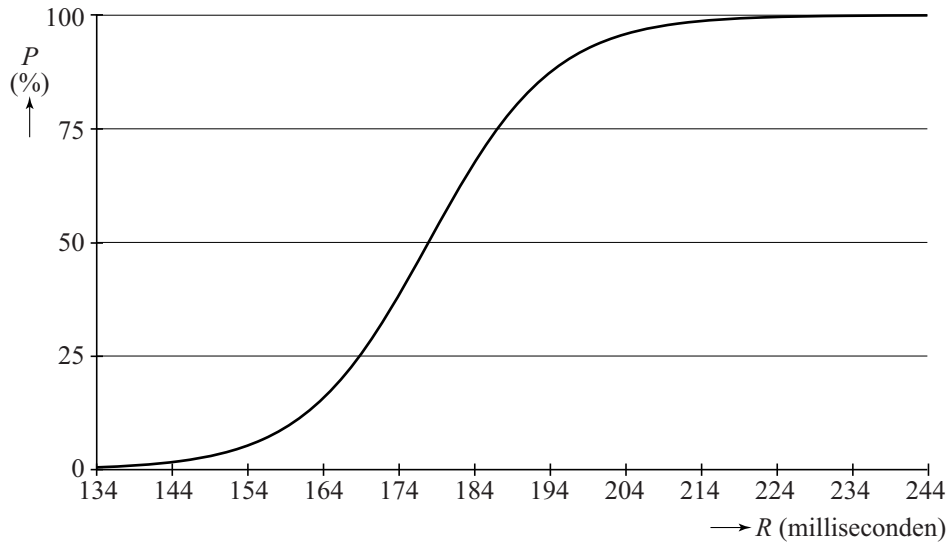
Deze formule is te herleiden tot de vorm $A = c \cdot R^2$.

- 3p **15** Bereken c met behulp van deze herleiding.

In het vervolg van deze opgave gebruiken we de formule voor R in plaats van tabel 1.

Bij een Amerikaans onderzoek is de reactietijd van mannen tussen 15 en 30 jaar gemeten zoals hiervoor beschreven. De resultaten zijn weergegeven in figuur 2.

figuur 2



Bij deze grafiek hoort de formule
$$P = \frac{100}{1 + 2 \cdot 10^9 \cdot 0,8866^R}.$$

Hierin is R de reactietijd in milliseconden en P het percentage mannen met een reactietijd minder dan R . Een persoon die erg snel reageert, heeft dus een korte reactietijd.

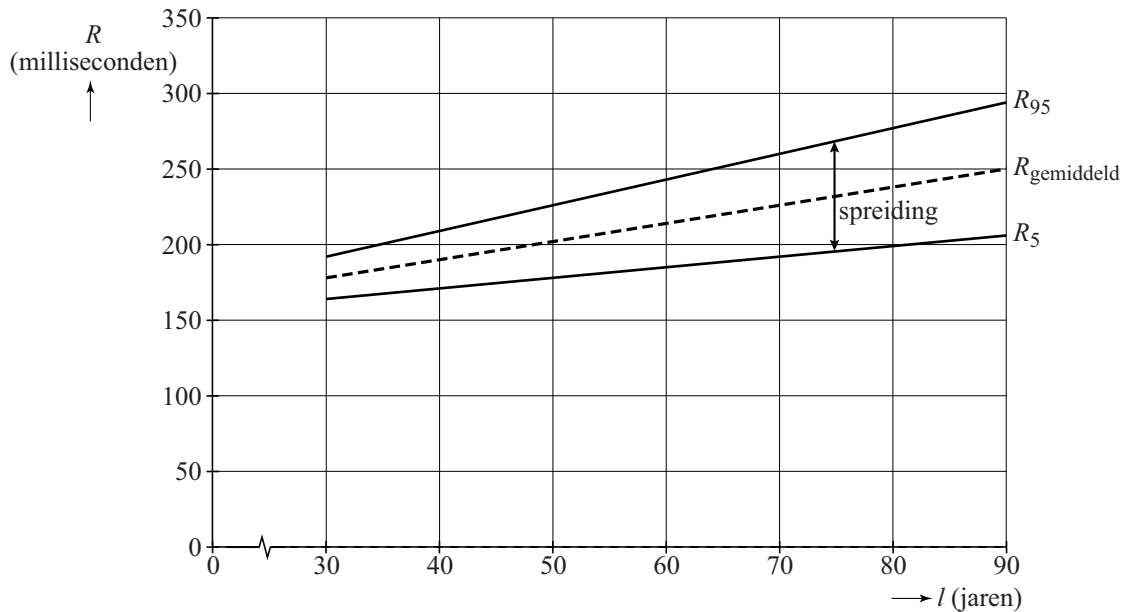
Henry ziet dat volgens dit onderzoek er gelukkig een aantal mannen langzamer reageert dan hij.

- 3p **16** Bereken met behulp van de formule hoeveel procent van de mannen langzamer is dan Henry met zijn reactietijd van 184 milliseconden. Rond je antwoord af op één decimaal.
- 4p **17** Bereken met de formules wat de gemiddelde vangafstand A maximaal mag zijn om tot de 5% snelste mannen te behoren.

Vanaf de leeftijd van 30 jaar neemt de reactietijd toe. In sommige situaties kan dat tot problemen leiden. Om bijvoorbeeld veilig te kunnen deelnemen aan het verkeer moet je niet al te langzaam reageren.

In figuur 3 is voor iedere leeftijd vanaf 30 jaar de grafiek van de gemiddelde reactietijd $R_{\text{gemiddeld}}$ van mannen getekend, evenals de grafieken van R_5 en R_{95} . Deze laatste twee grafieken geven grenzen aan: de 5% snelste mannen heeft een reactietijd minder dan R_5 en 5% van de mannen heeft een reactietijd meer dan R_{95} . Je ziet dat niet alleen de gemiddelde reactietijd toeneemt, ook de spreiding in de reactietijden neemt toe.

figuur 3



De volgende formules gelden:

$$R_{\text{gemiddeld}} = 178 + 1,2 \cdot (l - 30)$$

$$R_5 = R_{\text{gemiddeld}} - 14 - 0,5 \cdot (l - 30)$$

$$R_{95} = R_{\text{gemiddeld}} + 14 + 0,5 \cdot (l - 30)$$

Hierin is l de leeftijd in jaren.

De formule voor R_{95} kan worden herschreven tot $R_{95} = 1,7 \cdot l + 141$.

4p **18** Toon dit aan.

Hoe hoger de leeftijd, hoe groter de spreiding in reactietijd van de 90% mannen in het middengebied. Iemand zegt: "Voor elk jaar dat deze groep mannen ouder wordt, wordt de spreiding in reactietijd 1 milliseconde groter."

3p **19** Toon aan de hand van bovenstaande formules aan dat deze persoon gelijk heeft.

Vogeltrek

Vogels die jaarlijks op een andere plaats overwinteren en na de winter terugkeren naar hun broedgebied, worden trekvogels genoemd.

Onderzoekers houden jaarlijks de terugkeerdatum van diverse soorten trekvogels bij. Deze terugkeerdatum is sinds 1980 bij vrijwel alle trekvogelsoorten steeds vroeger geworden.

Uit Engels onderzoek blijkt bijvoorbeeld dat vanaf 1980 de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger wordt.

In 1980 keerde de gierzwaluw op 2 mei terug.



gierzwaluw

- 3p **20** Bereken op welke datum de gierzwaluw in 2020 zal terugkeren als deze trend zich voortzet.

Om voorspellingen voor de toekomst te kunnen doen, wordt een model opgesteld dat deze trend beschrijft. In dit model houden we geen rekening met schrikkeljaren. De dagen van het jaar worden genummerd: 1 januari krijgt dagnummer 1 en 31 december dus dagnummer 365.

Het dagnummer waarop de gierzwaluw in het model terugkeert, noemen we A . Bij de datum 2 mei hoort dagnummer $A = 122$. Zoals eerder vermeld, wordt de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger.

We noemen de tijd in jaren t , met $t = 0$ in 1980.

Er kan een lineaire formule worden opgesteld waarin A wordt uitgedrukt in t .

- 3p **21** Stel deze formule op.

In Engeland wordt de gierzwaluw ook wel de honderddagenvogel genoemd, omdat hij gemiddeld 100 dagen in het land verblijft voordat hij weer naar zijn wintergebied vertrekt. Uit hetzelfde onderzoek blijkt dat deze vertrekdatum sinds 1980 ook verandert. Deze wordt elke 10 jaar ongeveer 0,6 dag vroeger. Samen met het vroeger worden van de terugkeerdatum leidt dit ertoe dat de verblijfsduur langer wordt.

Ga ervan uit dat in 1980 de verblijfsduur 100 dagen is.

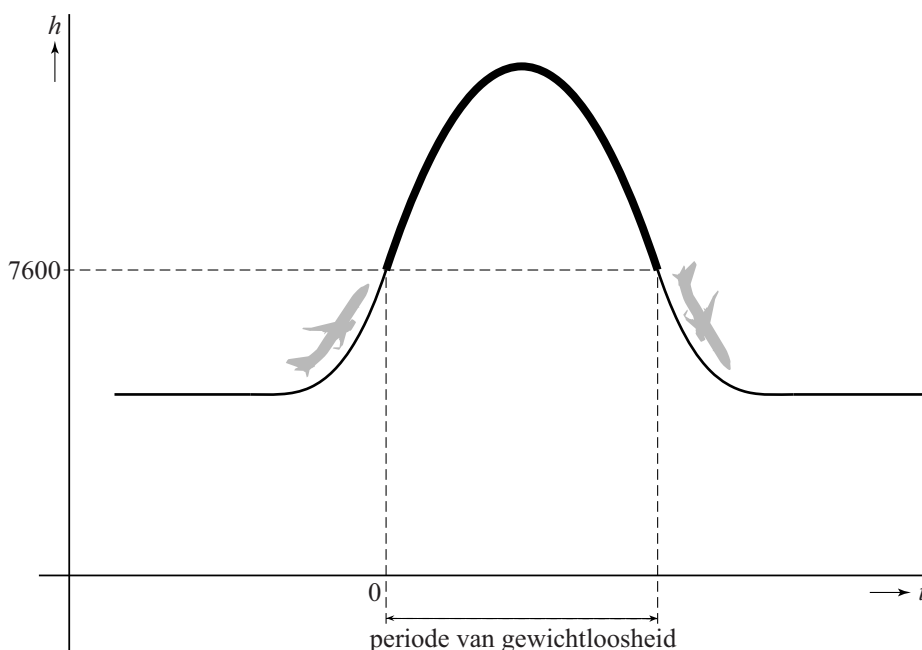
- 4p **22** Bereken in welk jaar de gierzwaluw dan voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland verblijft als de genoemde trends zich voortzetten.

Gewichtloosheid ervaren

Op aarde kun je gewichtloosheid ervaren tijdens zogenaamde paraboolvluchten met een vliegtuig. Deze vluchten worden onder andere gebruikt om astronauten te trainen.

Een dergelijke paraboolvlucht verloopt als volgt. Eerst versnelt de piloot het vliegtuig, waarna hij het steil omhoog stuurt. Op een hoogte van 7600 meter schakelt hij de motoren zo ver terug dat alleen nog maar de luchtweerstand wordt overwonnen. Op dat moment begint de werkelijke paraboolvlucht en de toestand van gewichtloosheid. Zie de figuur.

figuur



Het vliegtuig gaat, vanwege de hoge snelheid, eerst nog omhoog. Als de top van de paraboolbaan is bereikt, duikt het vliegtuig omlaag totdat het weer op dezelfde hoogte is als aan het begin van de paraboolvlucht. Op dat moment schakelt de piloot de motoren weer op vol vermogen en is de toestand van gewichtloosheid voorbij.

De hoogte van het vliegtuig tijdens de paraboolvlucht wordt gegeven door de formule:

$$h = -9,81 \cdot t^2 + 0,38 \cdot v \cdot t + 7600$$

Hierin is h de hoogte in meter, t de tijd in seconden en v de snelheid van het vliegtuig in km/uur bij de start van de paraboolvlucht, dat is bij $t = 0$.

Om zinvol te kunnen trainen is het belangrijk dat de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden achtereen duurt.

- 6p **23** Onderzoek bij welke snelheden v van het vliegtuig de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden duurt.